Soluție

1. Patru matrice, şi anume $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A) = 1 \neq 0$, deci matricea A este inversabilă. Se obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin M$.

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ inversabilă , cu $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M$. $B \cdot B^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$.

Deoarece $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, se obțin soluțiile $B_1 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Adunând relațiile lui Viète, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{a}{1}$ şi $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{8}{1}$ şi grupând, obținem concluzia.

b) Avem $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$. Folosind a treia relație a lui Viète, obținem $x_1x_4 + x_2x_3 = -2$.
Din a doua relație a lui Viète, obținem $a = 14$.

c) x_1, x_2, x_3, x_4 sunt în progresie aritmetică, deci există $z, r \in \mathbb{C}$, astfel încât $x_1 = z - 3r$, $x_2 = z - r$, $x_3 = z + r$ şi $x_4 = z + 3r$. Avem $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$, deci $z = 2$ şi din b) obținem $a = 14$ şi $x_1x_4 + x_2x_3 = -2$. Rezultă $r^2 = 1$ şi $b = -15$.